

2020年度専攻科入学者選抜学力検査問題

【数学】

(配点)

1	25点
2	25点
3	25点
4	25点

(注 意)

- 1 問題用紙は指示があるまで開かないこと。
- 2 問題用紙は1ページから8ページまで、解答用紙は4枚である。
検査開始の合図のあとで確かめること。
- 3 答えは、すべて解答用紙に記入すること。
- 4 解答用紙の総得点欄および得点欄には記入しないこと。
- 5 計算用紙は本冊子から切り離さないこと。

1 次の行列式の値を求めよ。【解答用紙には答のみ記入せよ】

(1) 次の2次の行列式 Δ_2 の値を求めよ。

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) 次の3次の行列式 Δ_3 の値を求めよ。

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(3) 次の4次の行列式 Δ_4 の値を求めよ。

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

(4) 5以上の奇数 n に対して、次の n 次の行列式 Δ_n の値を求めよ。

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$$

ただし、対角成分の上下に隣接する成分以外は全て0である。

[計 算 用 紙]

2 次の文章の空欄に適切なものを入れよ。【解答用紙には答のみ記入せよ】

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ について、 λ_1, λ_2 を A の固有値とする。ただし、 $\lambda_1 > \lambda_2$ とする。

(1) 固有値 λ_1, λ_2 はそれぞれ $\lambda_1 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $\lambda_2 = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $Av_1 = \lambda_1 v_1$ を満たす 0 でないベクトル v_1 は実数 c_1 を用いて、 $v_1 = c_1 \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される。ただし $c_1 \neq 0$ である。

(3) $Av_2 = \lambda_2 v_2$ を満たす 0 でないベクトル v_2 は実数 c_2 を用いて、 $v_2 = c_2 \begin{pmatrix} \boxed{\text{エ}} \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される。ただし $c_2 \neq 0$ である。

(4) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、 $A^n = \boxed{\text{オ}}$ となる。ただし $\boxed{\text{オ}}$ には行列を入れよ。

[計 算 用 紙]

3 x, y を変数とする 2 変数関数 $f(x, y) = x^2y + 6xy + y^3 - 2$ について次の問いに答えよ。
【解答用紙には答のみ記入せよ】

(1) 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

(2) 第 2 次偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ。

(3) 次の文章の空欄に適切な数を入れよ。

「関数 $f(x, y)$ は $(x, y) = (\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}}$, $(x, y) = (\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。」

[計 算 用 紙]

- 4 x, y を変数とする 2 変数関数 $f(x, y)$ を次のように定義するとき、次の問いに答えよ。【解答用紙には答のみ記入せよ】

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

- (1) xy 平面内の領域 D を次のように定める。

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

このとき、次の手順で重積分の値を求めよ。

- ① 変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ をすることにより、関数 $f(x, y)$ を変数 r, θ を用いて表せ。
- ② 次の重積分の値を変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いて求めよ。

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

- (2) 次の手順で広義積分の値を求めよ。

- ① 変数変換 $x = u, y = \sqrt{v - u^2}$ をすることにより、関数 $f(x, y)$ を変数 u, v を用いて表せ。
- ② $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して、次の累次積分の値を変数変換 $x = u, y = \sqrt{v - u^2}$ を用いて求めよ。

$$\int_a^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y) \, dy \right\} dx$$

- ③ ②の結果を用いて、次の広義積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y) \, dy \right\} dx$$

- (3) (2) の ③ とは積分順序が異なることに注意して、次の広義積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(x, y) \, dx \right\} dy$$

[計 算 用 紙]